圏論の演習問題 (Ver. 1.1)

日高　昇平
北陸先端科学技術大学院大学

1　目的・背景

この演習問題集は、特に数学的な背景を持たない圏論の初学者を対象に、通常の圏論の参考書には掲載されていない水準の "基礎" を確かめるための問題を意図している。例えば、そもそもある 2 つの射が "同じ" とは何だろうか、といった素朴な疑問を初学者は持つ。これらは、実は圏の定義の理解そのものであるが、圏の定義を一度読んだだけでは頭に入らず、"使える定義" にならない。そうした初学者を対象に想定し、圏論の "計算ドリル" が必要ではないかという着想から、この演習問題を起草した。各問題は、問と問の背景に分かれており、問題とその出題意図が書かれている。これも初学者にとって、そもそもそうした定義や問題に何の意味があるか読み取れないということに配慮するためである。

2　圏の定義

Definition 1. 圏 (category) とは対象 (object) の集合と射 (arrow, morphism) の集合をもつ。

- どの対象も恒等射を持つ。対象は恒等律 *(2.1 節)* を満たす限り何でも良い。
- 射は域 (domain) と余域 (codomain) をもつ。射 $f : X \to Y$ のように射 f を表記し、域 $X = dom(f)$ から余域 $Y = cod(f)$ への射を表す。
- どの圏の域と余域が同じ任意の射の対は合成可能 *(2.2 節)* であり、またその合成には結合律が成り立つ *(2.3 節)*。

2.1　恒等律

Definition 2. どの圏のどの対象 X も恒等射 1_X を持つ。1_X が恒等射であるとは恒等律、すなわち任意の射 $f\colon Y \to X$ と任意の射 $g\colon X \to Z$ に対して

$$1_X \circ f = f \text{ かつ } g \circ 1_X = g$$

が成り立つことを指す。

2.2　合成可能性

どの圏の域と余域が同じである射の対 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ を合成して、その圏に含まれる射 h をただ一つ定められる。f と g の合成射を $g \circ f$ と表記する。

2.3　合成の結合律

どの圏の射の合成にも結合律が成り立つ。すなわち、どの圏の域と余域が同じである射の 3 つ組み $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z, h\colon Z \to W$ の合成の仕方 $h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ はいずれも同じ射を定める。

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

3　恒等射の対称性

3.1　問

圏の定義の一つに恒等律 (2.1 節) がある。それでは、以下の性質 1., 2. を満たす “半端な恒等射”

$$h_X : X \to X, \quad i_X : X \to X$$

は存在しないことをしめせ。半端な恒等射 h_X と i_X は、任意の射 $f : X \to Y, g : Z \to X$ に対し、

1. $f \circ h_X = f$ かつ $h_X \circ g \neq g$ を満たす。
2. $f \circ i_X \neq f$ かつ $i_X \circ g = g$ を満たす。

3.2　問の背景

恒等律は左と右の射の合成に対して対称であるが、片側だけが成り立つような半端な恒等射は存在するかという問題。この問題と言わんとするところは、ある圏において、片側の合成にだけ恒等射のようにふるまう半端な射はないということである。“射が同じ” とはどういうことかを考える問題でもある。

4　恒等射の一意性

4.1　問

どの圏についても任意の対象 X がもつ恒等射がただ一つに定まることを示せ。

4.2　問の背景

恒等律 (2.1 節) を使う問題。恒等射が “一つに定まる” とはどのようなことを指しているのかも確認できる。

5　逆射の定義と対称性

5.1　逆射・同型射の定義

Definition 3. ある射 $f : X \to Y$ が同型射あるいは可逆であるとは、

$$f \circ g = 1_Y \text{ かつ } g \circ f = 1_X$$

を満たす逆射 $g : Y \to X$ が存在することを指す。

5.2　問

ある射 $f : X \to Y$ に対して、以下の条件 1. または 2. を満たす $g : Y \to X$ は存在しないことを示せ。

1. $f \circ g = 1_Y$かつ $g \circ f \neq 1_X$ を満たす。
2. $f \circ g \neq 1_Y$かつ $g \circ f = 1_X$ を満たす。

5.3　問の背景

ある射に対する逆射は左と右の射の合成に対していずれも恒等射を与える。では片側だけが成り立つような半端な逆射は存在するかという問題。この問題と言わんとするところは、ある圏において、もし逆射があれば、それは両側の合成でいずれも恒等射を与えるということである。

6　逆射の一意性

6.1　問

どの圏についても、ある射 $f : X \to Y$ が可逆である (定義: 5.1 節) とき、逆射 $g : Y \to X$ がただ一つに定まることを示せ。

6.2　問の背景

4 と同様の意図。

7　これは圏?

7.1　問

以下の構造が圏かどうか答えよ。圏の場合あるいは圏でない場合，(a) 対象, (b) 射、(c) 恒等射が何か、(d) 合成可能か、について答えよ。

1. 集合 $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ と、A の任意の元 $a \in A$ について $x \in A$ の関数 $f_a(x) = x + a$ を持つ構造。

2. 集合 $B = \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ と、B の任意の元 $b \in B$ について $x \in B$ の関数 $f_b(x) = x + b$ を持つ構造。

3. 集合 $C = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ と、C の幾つかの元 $c, c' \in C$ の間に包含関係 $c \subseteq c'$ が成り立つ構造。

4. 集合 $D = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ と、D の幾つかの元 $d, d' \in D$ の間に (等しいを除く) 包含関係 $d \subset d'$ が成り立つ構造。

5. 文字の集合 E = {‘’, a, b, c} の元 (ただし ‘’ は文字列) の 0 文字以上からなる文字列 E' = {‘’, ‘a’, ‘b’, ‘c’, ‘ab’, …} と、E' の元 $e' \in E'$ の関数として任意の $e \in E$ について $f_e(e')e' + e$ (ただし、文字列の和は結合 ‘ab’+‘c’ = ‘abc’ とする) をもつ構造。

8　関手 (functor)

8.1　関手の定義

Definition 4. 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ へ射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手 (functor) であるとは、

1. どの対象 $X \in \mathcal{C}$ に対しても

$$F(X) = X' \in \mathcal{D}$$

なる対象 X' が存在し，

2. どの射 $(f : X \to Y) \in \mathcal{C}$ に対しても

$$F(f) = f' : F(X) \to F(Y)$$

なる射 f' が存在し，

3. どの合成可能な射 $f, g \in \mathcal{C}$ に対しても

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

が成り立つ

ことをいう。

また、ある関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ の合成を

1. 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ について

$$G \circ F(X) := G(F(X)),$$

2. 任意の射 $f \in \mathcal{C}$ について

$$G \circ F(f) := G(F(f)),$$

と定義する。

8.2　恒等関手

Definition 5. 圏 $\mathcal{C}$ の恒等関手 $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ とはどの対象 $X \in \mathcal{C}$ に対しても

$$1_{\mathcal{C}}(X) = X,$$

どの射 $(f : X \to Y) \in \mathcal{C}$ に対しても

$$1_{\mathcal{C}}(f) = f,$$

どの合成可能な射 $f, g \in \mathcal{C}$ に対しても

$$1_{\mathcal{C}}(g \circ f) = g \circ f$$

が成り立つ特別な関手である。

8.2.1　問

どの圏 $\mathcal{C}$ にも恒等関手 $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ がただ一つ存在することを示せ。

8.3　関手の合成の結合律

8.3.1　問 1

関手の定義 (Def. 4) から、任意の関手 $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$, $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, $F_2 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ に対して、関手の合成には結合律

$$F_2 \circ (F_1 \circ F_0) = (F_2 \circ F_1) \circ F_0$$

が成り立つことを示せ。

8.3.2　問 2

もし仮に関手 F_0, F_1, F_2 に関して Def. 4 の 3. (関手による合成の保存) が成り立たない場合、関手の合成の結合律は成り立つか答えよ.

8.3.3　問の背景

以上の合成の定義 4, 恒等関手の一意性 (問 8.2.1) と結合律 (問 8.3.1) から、関手は圏を対象としたときの射としての条件 (Def. 1) を満たすことが分かる。従って、圏を対象とし関手を射とする**圏の圏** *(category of categories)* を定義できる。逆に、圏を対象とする圏を考えたときに、その射は関手に限るか、という問いも立てられる。この問に関係するのが 8.3.2 節の問 2 である。

9　モノイド (Monoid)

9.1　モノイドの定義

モノイドとは集合 X, 二項演算 $\circ : X \times X \to X$, と 単位元 $0 \in X$ の組 $(X.\circ, 0)$ で、単位元 0 は任意の $x \in X$ に対して

$$0 \circ x = x = x \circ 0,$$

二項演算 $\circ$ は任意の $x, y, z \in X$ に対して

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

を満たす構造である。

加えて、モノイドが任意の $x, y \in X$ に対して

$$x \circ y = y \circ x$$

を満たせば、可換モノイドと呼び、そうでない場合、非可換モノイドと呼ぶ。

9.2　問

問 (0) 7 節の問 1., 2., 3., 4., 5. のうち、モノイドはどれか。そのうち可換モノイドはどれか。

問 (1) (可換・非可換に関わらず、) モノイドは圏とみなせることを示せ。

問 (2) ”とても非可換な”モノイドを任意の 0 ではない $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して

$$x \circ y \neq y \circ x$$

を満たすモノイドとする。任意の 2 つの”とても非可換な”モノイドの間には、存在するならばただ一つの”自明な関手”しかもたないことを示せ。また、その唯一の”自明な関手”とは何かも答えなさい。

問 (3) 非可換モノイドの間の関手で、”自明な関手”以外に関手をもつ例を挙げなさい。

9.3　問の背景

可換モノイドが圏の定義を満たすことの確認と、モノイド準同型 (関手) の例を挙げる演習. モノイドの可換性が関手の存在に重要である（上記の問題 (2)）。”とても非可換な”モノイドでなくても自明な関手しかないものがあると思うが、どんな”中途半端に非可換な”モノイドでも非自明な関手

があるのか、ないのか、というのを探る問題 (の一部) が (3) そういった背景なしでも、この問題に取り組むと、関手がどういうときに成立するかより深く理解できると思う。

10 前順序

10.1 定義

Definition 6. 集合 X の要素 a, b に関して、二項関係 $a \leq b$ が以下の条件を満たすとき X を前順序集合という。

1. 反射律*:* 任意の $x \in X$ に $x \leq x$*.*

2. 推移律*:* 任意の $x, y, z \in X$ について、$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$*.*

前順序の *2* 条件に加え、
3. 反対称律*:* 任意の $x, y \in X$ について、$x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$*.*
を満たすとき、部分順序集合という。部分順序の *3* 条件に加え、
4. 全順序律*:* 任意の $x, y \in X$ について、$x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つ*.*
を満たすとき、全順序集合という。

10.2 問

以下の集合と二項関係について、前順序集合、部分順序集合、全順序集合、いずれでもないかを答えよ。

1. 集合 $C = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ と、C の幾つかの元 $c, c' \in C$ の間に集合の包含関係 $c \subseteq c'$ が二項関係がある場合。

2. 2 次元ベクトルの集合 $A = \{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (0, 1)\}$ に $a \leq a'$ ならば $(a, b) \preceq (a', b')$ と定義された二項関係 $\preceq$ を持つ場合

3. 2 次元ベクトルの集合 $A = \{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (0, 1)\}$ に $a \leq a'$ かつ $b \leq b'$ ならば $(a, b) \preceq (a', b')$ と定義された二項関係 $\preceq$ を持つ場合

4. 非負整数の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ に $a, b \in \mathbb{N}$ の間に何らかの整数 $c \in \mathbb{N}$ が存在して $b = a + c$ となるなら $a \preceq b$ と定義された二項関係がある場合。

10.3 問の背景

前順序になれるための演習。

11 圏としての前順序

11.1 問

(1) 任意の前順序集合は圏とみなせる。それはどのような圏か答えよ。
(2) 任意の部分順序集合は圏とみなせる。それはどのような圏か答えよ。
(3) 任意の全順序集合は圏とみなせる。それはどのような圏か答えよ。

11.2 問の背景

対象が一つで射が豊富な圏がモノイドであるのと対極にある圏の例。

12 前順序の圏の間の関手

12.1 問

圏 $\mathcal{C}$ を集合 $C = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ の元を対象とし、C の元 $c, c' \in C$ の間に集合の包含関係 $c \subseteq c'$ を射 $f : c \to c'$ とする。いくつの相異なる関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が存在するか答えよ。

12.2　問の背景

前順序の圏を題材に関手のあつかいになれるための演習。

13　自然変換

Definition 7. 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への 2 つの関手 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に関して、関手 F から関手 G への自然変換 $\alpha : F \to G$ とは、圏 $\mathcal{C}$ の各対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して定められる圏 $\mathcal{D}$ の射 $\alpha_X \in \mathcal{D}$ の族であり任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ とその間の射 $f : X \to Y$ について以下の図式を可換にするものを指す：

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"'] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd} . \tag{1}$$

14　前順序の圏の間の関手への自然変換

14.1　問

12 節の前順序の圏を $\mathcal{C}$ とする。(1) $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への関手 $F_1, F_2, \ldots$ の内、どの関手 F_i へも自然変換 $\alpha_i : \hat{F} \to F_i$ を持つ関手 $\hat{F}$ は何か答えなさい。(2) $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への関手 $F_1, F_2, \ldots$ の内、互いに自然変換がない ($\alpha'' : F' \to F''$, $\alpha' : F'' \to F'$ が存在しない) 関手の対 F', F'' をすべて挙げなさい。

14.2　問の背景

自然変換になれるための問題。前順序の圏の自然変換は、前順序の圏の圏において自然に前順序を与えていることにも気づくだろう。

15　群の間の自然変換

15.1　問

整数の集合 $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ を唯一の対象とし、任意の $z \in \mathbb{Z}$ に対して $f(z) = z + 1$ である関数 f を一つの同型射として持つ圏 (加法群) を $\mathcal{Z}$ とする。関手 $F_1, F_2 : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ が、いずれもある射 $g \in \mathcal{Z}$ について射 $F(g)$ が $F_(g)(z) = z + 1$ である関数であったとき、相異なる関手 F_1 と F_2 の間に自然変換は存在するか答えなさい。

15.2　問の背景

16　圏同型と圏同値の違い

16.1　問

圏同型ではないが圏同値である 2 つの圏を挙げ、なぜ圏同値のほうが圏の同じさとしてより適切だと考えられるのか理由を述べなさい。

　ただし、圏同型とは、2 つの圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ で

$$1_{\mathcal{C}} = G \circ F \text{ かつ } G \circ F = 1_{\mathcal{D}}$$

なる組があることを いう。

　また、圏同値とは、2 つの圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ で

$$1_{\mathcal{C}} \cong G \circ F \text{ かつ } G \circ F \cong 1_{\mathcal{D}}$$

なる組があることを いう。ある 2 つの関手 F, G に対して、$F \cong G$ は関手 F から G への可逆な自然変換があることを指す。

16.2　問の背景

ベーシック圏論 p39 に、圏の ” 適切な ” 同じさとしては、圏同型ではなく圏同値がよい、という一節がある。しかし特に具体例が挙げられておらず、単に形式的に言われても了解しづらい。そこでこ

の問題を考えた。この問題が言わんとするところは、圏の適切な同じさを考えるには自然変換を理解する必要があるということだ。Mc Lane の「自然変換を位置付けるために圏を定義した」、という言がまさに表れていると思う。先取りしてこの問題の結論を言うと、圏同型による ”同じさ ”は対象レベルまでの同一性を要求する (集合論的な同じさ) が、圏同値による ”同じさ ”は関係レベルのみの同一性を要求する、ということを例を挙げて確かめたらよい。

つまり、圏論が「関係の記述」に適切な理論である、ということの意味を本当に知る者は、圏同型と圏同値の違いは説明できるはずだ。